Lemme de Morse

[Rouvière]

Thm : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$.
Supposons que $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 assure : $f(x) - f(0) - Df(0)(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} D^2f(tx)(x,x)\,dt$

Donc : $f(x) - f(0) = {}^t x\, Q(x)\, x$ où $Q : x \mapsto \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ (dérivation sous $\int$).

Lemme : Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.
Il existe V voisinage ouvert de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$.

- Soit $\mathcal{X} : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tMA_0M \end{array}$, polynomiale donc $\mathcal{C}^1$. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{X}(I_n + H) - \mathcal{X}(I_n) = {}^t(I_n + H) A_0 (I_n + H) - A_0 = {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H$$
$$= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2) \quad \text{car } A_0 \in S_n(\mathbb{R}).$$

Donc $D\mathcal{X}(I_n) : H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$ donc $H \in \operatorname{Ker} D\mathcal{X}(I_n) \iff A_0H \in A_n(\mathbb{R})$.

- Soit $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. $I_n \in F$.
Soit $\psi = \mathcal{X}_{|F}$ et $\operatorname{Ker} D\psi(I_n) = \operatorname{Ker} D\mathcal{X}(I_n) \cap F = \{0\}$.
Or $F = A_0^{-1} S_n(\mathbb{R})$ (A_0 inversible), donc $\dim F = \dim S_n(\mathbb{R})$, donc $D\psi(I_n)$ est bijective.
Par théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de I_n dans F tel que $\psi : U \to \psi(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Quitte à remplacer U par $U \cap U'$, avec U' voisinage ouvert de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ (grâce à la continuité du det), on peut supposer $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, V est voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et :
$\forall A \in V,\ A = {}^t\psi^{-1}(A) . A_0 . \psi^{-1}(A)$. Ainsi $\rho = \psi^{-1}$ convient.

Or $Q(x)$ est toujours symétrique et $Q(0) = \frac{1}{2} D^2f(0)$ est inversible.
Donc il existe V voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$, $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^1$ tq
$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A) Q(0) \rho(A)$$

Par continuité de Q, il existe W voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq pour tout x dans W, $Q(x) \in V$ et $Q(x) = {}^t\rho(Q(x))\, Q(0)\, \rho(Q(x))$.

En posant $M(x) = \rho(Q(x))$, $y = M(x)x$, $f(x) - f(0) = {}^t y\, Q(0)\, y$.

- Par thm d'inertie de Sylvester, $\exists A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tAQ(0)A = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ car $Q(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. A étant inversible, $y \in \operatorname{Im}(A)$, donc en posant $y = Au$,

$f(x) - f(0) = {}^t y\, Q(0)\, y = {}^t u\, ({}^t A\, Q(0)\, A)\, u = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$.

Posons alors $\varphi : x \mapsto u = A^{-1} M(x) x$: $\varphi(0) = 0$ et φ est $\mathcal{C}^1$ sur W.

Si $h \in W$, $\varphi(h) - \varphi(0) = A^{-1} M(h) h - A^{-1} M(0).0$

$= A^{-1}(M(0) + o(1))\, h = A^{-1} M(0) h + o(\|h\|)$.

Donc $D\varphi(0) = A^{-1} M(0)$ est inversible.

Le théorème d'inversion locale assure alors que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de $0 = \varphi(0)$ dans $\mathbb{R}^n$.